

LIBRIS

We know
books

Sandra TEODORESCU

Alina CHIVULESCU

METODE CANTITATIVE ȘI MATEMATICI APLICATE



Capitolul 1. Dobânda și operațiunile de actualizare

Încă din cele mai vechi timpuri, s-au impus în rândul omenirii, conceptele de împrumut, credit și dobânda aferentă. Deși creditul este considerat un mecanism nou, modern, sau chiar un viciu modern, o privire prin paginile istoriei financiare va risipi impresia de noutate. Este adevărat că recent s-au dezvoltat multe noi forme de creditare, iar statisticile care reflectă creșterea volumului creditului în ultimele decenii sunt impresiionante, însă creditul a fost folosit inițial încă din Antichitate.

Creditul a precedat industria, banca și chiar vârsta monedelor. Se poate spune că împrumuturile cu dobândă au început atunci când fermierul neolitic a împrumutat semințe unui văr și se aștepta la mai multe înapoi la recoltă. De altfel, istoria juridică a mai multor civilizații mari precum Babilonul, Grecia sau Roma a început cu o reglementare elaborată a creditului.

Astfel, începând din Antichitate, putem urmări în fluctuațiile ratelor dobânzii, ascensiunea sau căderea națiunilor și civilizațiilor, progresul cunoașterii și tehnologiei, succesul sau eșecul unor forme politice, succesul unor comunități și eșecul altora de a dezvolta principii și legi comerciale eficiente și tehnici și politici monetare și fiscale adecvate, sau efectele creșterii economice și ale declinului economic.

Concret, dobânda reprezintă suma de bani plătită de către debitor creditorului său pentru folosirea capitalului împrumutat. În cazul unui împrumut de la bancă, dobânda este suma plătită pentru împrumut, iar dacă este vorba despre o depunere într-un cont de economii, dobânda este suma primită de la bancă pentru depozit. Cu alte cuvinte, dobânda constituie o recompensă pentru riscul pe care și-l asumă creditorul prin cedarea temporară a capitalului său debitorului.

1.1. DOBÂNDĂ SIMPLĂ

Definiție: O operațiune financiară se desfășoară în regim de dobândă simplă dacă dobânda se calculează asupra aceleiași sume de bani pe toată durata folosirii acesteia.

Notatii:

S_0 – capitalul inițial, valoarea inițială sau actuală a operațiunii financiare

$S_t = S(S_0, t)$ – capitalul, valoarea finală a operațiunii financiare

$S_t - S_0 = D$ – dobânda $\Rightarrow D = S_0 \cdot i \cdot t$

$S_t = S_0(1 + i \cdot t)$

t – timpul (ani)

$i = \frac{p}{100}$ – rata anuală a dobânzii, unde p – procentul anual

ex.: $p = 6\% \Rightarrow i = \frac{6}{100} = 0.06$

$(1 + i \cdot t)$ – factor de fructificare

$\frac{1}{1+i \cdot t} = (1 + i \cdot t)^{-1}$ – factor de actualizare

$S_t = S_0(1 + i \cdot t) \Rightarrow S_0 = \frac{S_t}{1+i \cdot t} = S_t \cdot (1 + i \cdot t)^{-1}$

Observatii:

➤ Dacă se consideră anul împărțit în m părți egale și durata de timp a operațiunii n_m , atunci $t_m = \frac{n_m}{m}$ (timpul exprimat în ani)

ex.: $m = 2$ (semestre) $\Rightarrow n_2$ – număr semestre pentru care se calculează dobânda

$m = 4$ (trimestre) $\Rightarrow n_4$ – număr trimestre pentru care se calculează dobânda

$m = 12$ (luni) $\Rightarrow n_{12}$ – număr luni pentru care se calculează dobânda

$m = 360$ (zile) $\Rightarrow n_{360}$ – număr zile pentru care se calculează dobânda

➤ Pe plan internațional există 3 tipuri de proceduri de calcul al duratei de timp t_m :

- procedura engleză, conform căreia anul are 365 de zile, iar lunile sunt cele calendaristice (cu 28, 29, 30, 31 de zile)

- procedura franceză, conform căreia anul are 360 de zile, iar lunile sunt cele calendaristice (cu 28, 29, 30, 31 de zile)
- procedura germană, conform căreia anul are 360 de zile, iar lunile au 30 de zile

În cadrul acestei lucrări se vor utiliza valorile procedurii germane.

➤ Dacă se plasează capitalul S_0 în regim de dobândă simplă, cu procente anuale diferite, pe perioade de timp diferite:

$$p_1 = 100 \cdot i_1, \text{ pe perioada } t_1$$

$$p_2 = 100 \cdot i_2, \text{ pe perioada } t_2$$

⋮

$$p_n = 100 \cdot i_n, \text{ pe perioada } t_n$$

$$\text{atunci } S_t = S_0(1 + i_1 \cdot t_1 + i_2 \cdot t_2 + \dots + i_n \cdot t_n)$$

$$\text{iar } D = S_0(i_1 \cdot t_1 + i_2 \cdot t_2 + \dots + i_n \cdot t_n)$$

1.2. OPERAȚIUNI ECHIVALENTE ÎN REGIM DE DOBÂNDĂ SIMPLĂ

Presupunem că se plasează sumele $S_1, S_2, \dots, S_n$, pe perioadele de timp $t_1, t_2, \dots, t_n$, cu procentele $p_1, p_2, \dots, p_n$. Operațiunea complexă rezultată va fi notată cu $A(S_k, t_k, p_k)$.

$$A(S_k, t_k, p_k)_{k=\overline{1,n}} = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

Observații:

- Dacă $n=1 \Rightarrow A = \text{operațiune simplă}$
- Considerăm două operațiuni multiple, A și B

Definiție: Spunem că A și B sunt echivalente în regim de dobândă simplă în raport cu dobânda dacă și numai dacă produc aceeași dobândă simplă.

$$\begin{matrix} DS \\ A \approx B \Leftrightarrow D(A) = D(B) \\ D \end{matrix}$$

Definiție: Spunem că A și B sunt **echivalente în regim de dobândă simplă** în raport cu valoarea actuală **dacă și numai dacă** au aceeași valoare actuală.

$$\begin{array}{c} DS \\ A \approx B \Leftrightarrow \mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) \\ \mathcal{A} \end{array}$$

➤ Prezintă interes două cazuri:

- dacă B are un număr egal de componente cu A și unul dintre componentele lui B este constant (numit element mediu înlocuitor)
- dacă B este o operațiune simplă în care două elemente sunt date și cel de-al treilea trebuie determinat (numit element unic înlocuitor)

✓ Problema 1

Se depune un capital de 10000 u.m. în regim de dobândă simplă cu durată de 10 luni, la un procent anual al dobânzii de 6%. Să se determine:

- a) dobânda realizată după 10 luni
- b) suma totală de care dispunem la scadență

Rezolvare

$$S_0 = 10000 \text{ u.m.}$$

$$n_{12} = 10 \text{ luni}$$

$$p = 6\% \Rightarrow i = 0,06$$

$$\text{a) } D = S_0 \cdot i \cdot t$$

$$t = \frac{n_m}{m} = \frac{n_{12}}{12} = \frac{10}{12} \text{ ani}$$

$$D = 10000 \cdot 0,06 \cdot \frac{10}{12} = \frac{6000}{12} = 500 \text{ u.m.}$$

$$\text{b) } S_t = S_0 + D$$

$$S_t = 10000 + 500 = 10500 \text{ u.m.}$$

$$\text{sau } S_t = S_0(1 + i \cdot t)$$

$$S_t = 10000 \left(1 + 0.06 \cdot \frac{10}{12} \right) = 10500 \text{ u. m.}$$

✓ Problema 2

Ce sumă trebuie plasată în regim de dobândă simplă, pe o durată de 270 de zile, cu $p = 7\%$ anual, pentru a putea ridica la scadență suma de 42100 u.m.?

Rezolvare

$$S_0 = ?$$

$$n_{360} = 270 \text{ zile}$$

$$p = 7\% \Rightarrow i = 0,07$$

$$S_t = 42100 \text{ u.m.}$$

$$S_t = S_0(1 + i \cdot t)$$

$$t = \frac{n_m}{m} = \frac{n_{360}}{360} = \frac{270}{360} \text{ ani}$$

$$S_0 = \frac{S_t}{1 + i \cdot t} = \frac{42100}{1 + 0,07 \cdot \frac{270}{360}} = 40000 \text{ u. m.}$$

✓ Problema 3

Pe ce durată de timp trebuie plasat un capital cu dobândă simplă la o bancă ce acordă o dobândă de $p = 5\%$ anual pentru ca la scadență să retragem dublul capitalului depus?

Rezolvare

$$p = 5\% \Rightarrow i = 0,05$$

$$t = ?$$

$$S_t = 2S_0$$

$$S_t = S_0(1 + i \cdot t)$$

$$2S_0 = S_0(1 + 0,05 \cdot t)$$

$$1 = 0,05 \cdot t$$

$$t = \frac{1}{\frac{5}{100}} = \frac{100}{5} = 20 \text{ ani}$$

✓ Problema 4

Începând din ianuarie, în prima zi a fiecărei luni, timp de un an, se depune într-un cont suma de 200 € în regim de dobândă simplă, iar în ultima zi a anului se lichidează contul. Să se determine dobânda totală obținută și valoarea finală, dacă $p = 4\%$ anual pentru toată durata operațiunii.

Rezolvare

$$S_0 = 200 \text{ €}$$

$$p = 4\% \Rightarrow i = 0,04$$

$$t_1 = \frac{12}{12}, t_2 = \frac{11}{12}, t_3 = \frac{10}{12}, \dots, t_{12} = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} D &= D_1 + D_2 + \dots + D_{12} = S_0(i_1 \cdot t_1 + i_2 \cdot t_2 + \dots + i_{12} \cdot t_{12}) \\ &= S_0 \cdot i \cdot (t_1 + t_2 + \dots + t_{12}) \\ &= 200 \cdot 0,04 \cdot \left(\frac{12}{12} + \frac{11}{12} + \dots + \frac{1}{12} \right) = 8 \cdot \frac{78}{12} = 52 \text{ €} \end{aligned}$$

$$S_t = 200 \cdot 12 + 52 = 2452 \text{ €}$$

✓ Problema 5

O persoană a deschis un cont la 01.10 printr-o depunere de 60000 lei, în regim de dobândă simplă. Să se determine suma de care va dispune dacă lichidează contul la 30.06 în anul următor, în condițiile unei rate anuale a dobânzii acordate de bancă de 8% între octombrie și decembrie anul curent, 7% în ianuarie și februarie anul următor și 6% în perioada martie - iunie anul următor.

Rezolvare

$$S_0 = 60000 \text{ lei}$$

$$p_1 = 8\% \Rightarrow i_1 = 0,08$$

$$t_1 = \frac{3}{12} \text{ ani}$$

$$p_2 = 7\% \Rightarrow i_2 = 0,07$$

$$t_2 = \frac{2}{12} \text{ ani}$$

$$p_3 = 6\% \Rightarrow i_3 = 0,06$$

$$t_3 = \frac{4}{12} \text{ ani}$$

$$D = S_0(i_1 \cdot t_1 + i_2 \cdot t_2 + i_3 \cdot t_3) = 60000 \left(0,08 \cdot \frac{3}{12} + 0,07 \cdot \frac{2}{12} + 0,06 \cdot \frac{4}{12} \right) = 3100 \text{ lei}$$

$$S_t = S_0 + D = 60000 + 3100 = 63100 \text{ lei}$$

✓ Problema 6

O persoană depune la 01.02 suma de 10000 lei. La data de 01.03 retrage 5000 lei, iar la 15.04 depune 2000 lei. La 01.06 retrage 4000 lei, iar la 01.07 lichidează contul. Să se determine capitalul disponibil la lichidarea contului știind că operațiunile se desfășoară în regim de dobândă simplă, cu $p = 15\%$ anual.

Rezolvare

+S ₁	-S ₂	+S ₃	-S ₄	lichidare
01.02	01.03	15.04	01.06	01.07

$$S_t = S_{t_1} - S_{t_2} + S_{t_3} - S_{t_4}$$

$$t_1 = \frac{5}{12} = \frac{156}{360} \text{ ani}, t_2 = \frac{4}{12} = \frac{120}{360} \text{ ani}, t_3 = \frac{2,5}{12} = \frac{75}{360} \text{ ani}, t_4 = \frac{1}{12} = \frac{30}{360} \text{ ani}$$

$$S_{t_1} = S_1(1 + i \cdot t_1) = 10000 \left(1 + 0,15 \cdot \frac{5}{12} \right) = 10625 \text{ lei}$$

$$S_{t_2} = S_2(1 + i \cdot t_2) = 5000 \left(1 + 0,15 \cdot \frac{4}{12} \right) = 5250 \text{ lei}$$

$$S_{t_3} = S_3(1 + i \cdot t_3) = 2000 \left(1 + 0,15 \cdot \frac{2,5}{12} \right) = 2062,5 \text{ lei}$$

$$S_{t_4} = S_4(1 + i \cdot t_4) = 4000 \left(1 + 0,15 \cdot \frac{1}{12} \right) = 4050 \text{ lei}$$

$$S_t = 10625 - 5250 + 2062,5 - 4050 = 3387,5 \text{ lei}$$

✓ Problema 7

O persoană a plasat la trei bănci, în regim de dobândă simplă, următoarele trei sume:

- la banca B₁, 8000 lei, în urmă cu 3 luni, $p = 6\%$ anual

- la banca B₂, 6000 lei, în urmă cu 102 zile, $p = 6,5\%$ anual
- la banca B₃, 12000 lei, în urmă cu 3 trimestre, $p = 7\%$ anual

a) Dacă persoana ar fi dorit să plaseze sume egale la fiecare dintre cele trei bănci, la momentele și cu procente menționate, sa se determine valoarea sumelor plasate astfel încât sa se realizeze aceeași dobândă.

b) Dacă persoana ar fi dorit să facă un singur plasament în valoare de 26000 lei, în urmă cu un semestru, ce procent anual al dobânzii, $p\%$, ar trebui să acorde banca pentru a obține aceeași valoare a dobânzii realizate la momentul depunerii la cele trei bănci.

c) Să se determine scadența medie înlocuitoare a celor trei plasamente.

d) Să se afle suma unică înlocuitoare în cazul unui plasament făcut în urmă cu 200 de zile, la un procent $p = 5,5\%$ anual.

Rezolvare

Notăm cu A operațiunea compusă din cele trei plasamente.

$$A = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8000 & 6000 & 12000 \\ 3 & 102 & 270 \\ 12 & 360 & 360 \\ 6\% & 6,5\% & 7\% \end{pmatrix}$$

$$S_1 = 8000 \text{ lei} \quad p_1 = 6\% \Rightarrow i_1 = 0,06 \quad t_1 = \frac{3}{12} = \frac{90}{360} \text{ ani}$$

$$S_2 = 6000 \text{ lei} \quad p_2 = 6,5\% \Rightarrow i_2 = 0,065 \quad t_2 = \frac{102}{360} \text{ ani}$$

$$S_3 = 12000 \text{ lei} \quad p_3 = 7\% \Rightarrow i_3 = 0,07 \quad t_3 = \frac{270}{360} \text{ ani}$$

$$\text{a) Fie } B = \begin{pmatrix} S & S & S \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \quad S = \text{suma medie înlocuitoare}$$

$$\begin{matrix} DS \\ A \approx B \Leftrightarrow D(A) = D(B) \\ D \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} D(A) &= \sum_{k=1}^3 S_k \cdot i_k \cdot t_k = S_1 \cdot i_1 \cdot t_1 + S_2 \cdot i_2 \cdot t_2 + S_3 \cdot i_3 \cdot t_3 \\ &= 120 + 110,5 + 630 = 860,5 \text{ lei} \end{aligned}$$

$$D(B) = \sum_{k=1}^3 S_k \cdot i_k \cdot t_k = S \cdot i_1 \cdot t_1 + S \cdot i_2 \cdot t_2 + S \cdot i_3 \cdot t_3$$

$$= S(i_1 \cdot t_1 + i_2 \cdot t_2 + i_3 \cdot t_3) = S \sum_{k=1}^3 i_k \cdot t_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^3 S_k \cdot i_k \cdot t_k = S \sum_{k=1}^3 i_k \cdot t_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sum_{k=1}^3 S_k \cdot i_k \cdot t_k}{\sum_{k=1}^3 i_k \cdot t_k} = \frac{860,5}{0,015+0,018+0,05} = 10367,5 \text{ lei}$$

b) $S = 26000 \text{ lei}$

$$t = \frac{6}{12} \text{ ani}$$

$p = \text{dobânda unică înlocuitoare}$

$p = ?$

$$\text{Fie } C = \begin{pmatrix} S \\ p \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26000 \\ p \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} DS \\ A \approx C \Leftrightarrow D(A) = D(C) \\ D \end{matrix}$$

$$D(A) = \sum_{k=1}^3 S_k \cdot i_k \cdot t_k = S_1 \cdot i_1 \cdot t_1 + S_2 \cdot i_2 \cdot t_2 + S_3 \cdot i_3 \cdot t_3$$

$$= 120 + 110,5 + 630 = 860,5 \text{ lei}$$

$$D(C) = S \cdot i \cdot t = 26000 \cdot i \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^3 S_k \cdot i_k \cdot t_k = S \cdot i \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = \frac{\sum_{k=1}^3 S_k \cdot i_k \cdot t_k}{S \cdot t} = \frac{860,5}{13000} = 0,0661 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 6,61\%$$

c) Fie $E = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ t & t & t \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$ $t = \text{scadența medie înlocuitoare}$

$$\begin{matrix} DS \\ A \approx E \Leftrightarrow D(A) = D(E) \\ D \end{matrix}$$

$$D(A) = \sum_{k=1}^3 S_k \cdot i_k \cdot t_k = S_1 \cdot i_1 \cdot t_1 + S_2 \cdot i_2 \cdot t_2 + S_3 \cdot i_3 \cdot t_3$$

$$= 120 + 110,5 + 630 = 860,5 \text{ lei}$$

$$D(E) = \sum_{k=1}^3 S_k \cdot i_k \cdot t_k = S_1 \cdot i_1 \cdot t + S_2 \cdot i_2 \cdot t + S_3 \cdot i_3 \cdot t$$

$$= t(S_1 \cdot i_1 + S_2 \cdot i_2 + S_3 \cdot i_3) = t \sum_{k=1}^3 S_k \cdot i_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^3 S_k \cdot i_k \cdot t_k = t \sum_{k=1}^3 S_k \cdot i_k \Rightarrow t = \frac{\sum_{k=1}^3 S_k \cdot i_k \cdot t_k}{\sum_{k=1}^3 S_k \cdot i_k} = \frac{860,5}{480+390+840} =$$

$$= 0,5 \text{ ani} = 6 \text{ luni}$$

d) $S = ?$

$$t = \frac{200}{360} \text{ ani}$$

$S = \text{suma unică înlocuitoare}$

$$p = 5,5\% \Rightarrow i = 0,055$$

$$\text{Fie } F = \begin{pmatrix} S \\ p \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ 5,5\% \\ \frac{200}{360} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} DS \\ A \approx F \Leftrightarrow D(A) = D(F) \\ D \end{matrix}$$

$$D(A) = \sum_{k=1}^3 S_k \cdot i_k \cdot t_k = S_1 \cdot i_1 \cdot t_1 + S_2 \cdot i_2 \cdot t_2 + S_3 \cdot i_3 \cdot t_3$$

$$= 120 + 110,5 + 630 = 860,5 \text{ lei}$$

$$D(F) = S \cdot i \cdot t = S \cdot 0,055 \cdot \frac{200}{360}$$